Woche 7

Berechnung der Fundamentalen Unterräume (4.3)

Berechnung eines Vektorraums = Berechnung einer Basis!

Heute für

- $C(A)$: Spaltenraum einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ($\mathrm{Im}(A)$, „Bild")
- $R(A) = C(A^T)$: Zeilenraum von A
- $N(A)$: Nullraum
- $LN(A) = N(A^T)$: Linker Nullraum

Werkzeug: Gauss-Jordan-Elimination!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \to \quad R_0 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{REF}(1,3)}. \quad \text{(RE, running example)}$$

Theorem 4.25: Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, R_0 in $\mathrm{REF}(j_1, j_2, \ldots, j_r)$ das Resultat von Gauss-Jordan auf A. Dann gilt: A hat unabh. Spalten $j_1, j_2, \ldots, j_r$, und diese bilden eine Basis von $C(A)$. Folglich gilt: $\dim(C(A)) = r = \mathrm{rank}(A)$

Beweis: Die unabh. Spalten sind eine Basis von $C(A)$ (Lemma 4.17). Mit Gauss-Jordan bekommen wir ihre Positionen $j_1, j_2, \ldots, j_r$ (Lemma 3.22).

RE:

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{(columns } 1,3 \text{ of } A).$$

Zeilenraum: $R(A) = C(A^T) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Lemma 4.11 angewendet auf A^T: $R(A)$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$. Basis kann durch Gauss-Jordan auf A^T berechnet werden, aber es geht auch mit $A \to R_0$, die wir schon gemacht haben.

Lemma 4.27: Sei A eine $m \times n$ Matrix, M eine invertierbare $m \times m$-Matrix. Dann gilt: $R(A) = R(\underbrace{MA}_{R_0})$

Beweis: $R(A) \overset{!}{=} R(MA)$

$$C(B) = C(A^T) \qquad\qquad C((MA)^T) = C(\underbrace{A^T}_{B}\underbrace{M^T}_{N}) = C(BN)$$

$$C(B) \overset{!}{=} C(BN)$$

invertierbar! $N^{-1} = (M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$.

$v \in C(B)$

$\Updownarrow$

$v = Bx$ für ein $x \in \mathbb{R}^m$

$\Uparrow \quad \Downarrow \qquad y := N^{-1}x, \; x = Ny$

$v = BNy$ für ein $y \in \mathbb{R}^m$

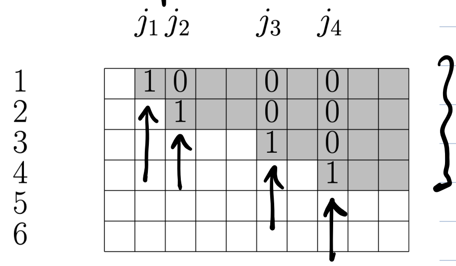
$\Updownarrow$

$v \in C(BN)$

Theorem 4.28: Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, R_0 in $\mathrm{REF}(j_1, j_2, \ldots, j_r)$ das Resultat von Gauss-Jordan auf A. Die ersten r

Zeilen von R_0 bilden eine Basis von $R(A)$. Folglich gilt: $\dim(R(A)) = r = \operatorname{rank}(A)$.

Beweis: $R_0 = MA$, also $R(A) = R(R_0)$ nach vorh. Lemma. Eine Basis von $R(R_0)$ kann abgelesen werden: R_0 endet mit $m-r$ Nullzeilen, d.h. die ersten r Zeilen spannen $R(R_0)$ bereits auf und sind linear unabhängig (jede Zeile hat eine „private" 1 bei der Stufe).



erste r Zeilen

$\mathrm{REF}(2,3,6,8), r = 4$

RE:

$$B = \{[1 \quad 2 \quad 0 \quad 3], [0 \quad 0 \quad 1 \quad -2]\} \quad (\text{rows } 1, 2 \text{ of } R_0)$$

Wegen
$$\underbrace{\dim(C(A))}_{} = \underset{\substack{\| \\ \operatorname{rank}(A)}}{r} = \dim(R(A)) = \underset{\substack{\| \\ \operatorname{rank}(A^T)}}{\dim(C(A^T))}$$
$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^T)$$

Theorem 4.29: Sei A eine $m \times n$ Matrix. Dann gilt
$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^T)$$
(„Spaltenrang = Zeilenrang")

<u>Nullraum</u>

Def. 4.31 $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$

(Ker (A), „kern")

$N(A)$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ (Beweis ähnlich wie bei $C(A)$).

$R_0 = MA$ hilft wieder!

Lemma 4.33: Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, M eine invertierbare $m\times m$ Matrix. Dann gilt $N(A) = N(\underbrace{MA}_{R_0})$.

Beweis:

$$x \in N(A) \Leftrightarrow Ax = 0 \Rightarrow MAx = M0$$

$$\Uparrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\underbrace{M^{-1}M}_{I}Ax = M^{-1}0 \Leftarrow MAx = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x \in N(MA)$$

fehlt(e) im Lecture plan

Bestimmung einer Basis von $N(A) = N(R_0) = N(R)$

R_0 nach Entfernung der $m-r$ Nullzeilen

Beispiel in RE:
$$R = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & & \uparrow & \\ 1 & & 3 & \end{array} \end{array}.$$

$Rx = 0$ kann wie folgt geschrieben werden:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x(I)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}_{Q}\underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{x(Q)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x(I) = -Qx(Q).$$

Wähle die Werte der <u>freien</u> Variablen $x(Q)$ beliebig; lies die Werte der <u>Basisvariablen</u> $x(I)$ ab!

Basis erhalten wir als spezielle Lösungen: wähle für $x(Q)$ die Standard-Einheitsvektoren!

		special solutions	
free variables	$\underbrace{\begin{bmatrix}x_2\\x_4\end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(Q)}$	$\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_1(Q)}$	$\underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_2(Q)}$
basic variables	$\underbrace{\begin{bmatrix}-2&-3\\0&2\end{bmatrix}}_{-Q}\underbrace{\begin{bmatrix}x_2\\x_4\end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(Q)}=\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\x_3\end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(I)}$	$\underbrace{\begin{bmatrix}-2\\0\end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_1(I)}$	$\underbrace{\begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_2(I)}$
nullspace equation	$\mathbf{0}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&2&0&3\\0&0&1&-2\end{bmatrix}}_{R}\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}}_{\mathbf{x}}$	$\underbrace{\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_1}$	$\underbrace{\begin{bmatrix}-3\\0\\2\\1\end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_2}$

$\underbrace{\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2}_{\text{Basis von } N(R)}$

Allgemein (Theorem 4.35): I hat r Spalten, Q hat $n-r$ Spalten. Es gibt $n-r$ spezielle Lösungen ($x(Q) = e_1, e_2, \dots, e_{n-r}$), d.h. $\dim(\underbrace{N(A)}_{=N(R)}) = n-r = n - \operatorname{rank}(A)$.

$m \times n$, $\operatorname{rank}(A) = r$

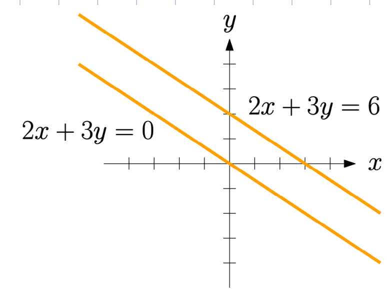
subspace		
name	symbol	dimension
Column space	$\mathbf{C}(A)$	r
Row space	$\mathbf{R}(A)$	r
Nullspace	$\mathbf{N}(A)$	$n-r$
Left nullspace	$\mathbf{LN}(A) = \mathbf{N}(A^\top)$	$m-r$

$r + n - r = n$

Der Lösungsraum von $Ax = b$

Def. 4.39: $Sol((A,b) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$

Für $b \neq 0$ ist $Sol((A,b)$ kein Unterraum (0 ist nicht drin)



Sol(A, b) **for** $A = [2 \;\; 3]$, $\mathbf{b} = [6]$ **and** $\mathbf{b} = [0]$

Theorem 4.40: Sei A eine $m \times n$ Matrix, $b \in \mathbb{R}^m$.
Sei x irgendeine Lösung von $Ax = b$. Dann gilt:

$$Sol((A,b) = \{x + v : v \in N(A)\}$$

Beweis:

(i) Sei $y \in Sol((A,b)$. Zu zeigen: $y = x + \underbrace{v}_{\in N(A)}$:

Schreibe $y = x + \underbrace{(y-x)}_{v}$, mit $Av = A(y-x) = \underbrace{\underbrace{Ay}_{b} - \underbrace{Ax}_{b}}_{0}$

(ii) Sei $y = x + \underbrace{v}_{\in N(A)}$. Zu zeigen: $y \in Sol((A,b)$:

$$Ay = A(x+v) = \underbrace{Ax}_{b} + \underbrace{Av}_{0} = b \;\checkmark$$

Falls es eine Lösung gibt, hat $Sol((A,b)$ „Dimension" $n - r = \dim(N(A))$. $Sol((A,b)$ ist eine „verschobene Kopie" von $N(A)$.

Falls $r = m$: Es gibt immer eine Lösung

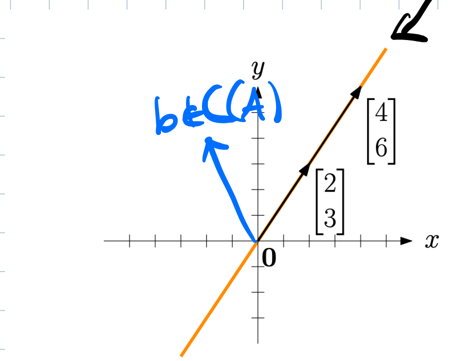
(Lemma 4.41): direkte Lösung von $R_0 x = c$

Funktioniert immer, weil R_0 keine Nullzeilen hat.

Falls $r < m$: „typischerweise" keine Lösung

für fast alle $b \in \mathbb{R}^m$

$C(A)$ hat Dimension $r < m$, ist also ein echter Unterraum von $\mathbb{R}^m$.



$C\Big(\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}}_{A}\Big)$

Wann hat $Ax = b$ eine Lösung? Gdw $b \in C(A)$!